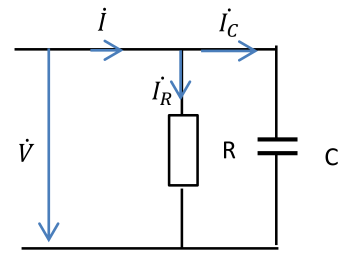
3.基本交流回路

V.　R−C並列回路

図のように、抵抗R[Ω]とコンデンサC[F]を並列に接続し、実効値V[V],周波数f[Hz]の正弦波電圧を加えた時に、電流I[A]が流れたとする。

$\dot{V}_R$は$\dot{I}$と同相で

$$I_R = \frac{V}{R}$$



$\dot{I}_C$は$\dot{V}$より位相がπ/2進む。1/ωC=Xcとおくと、

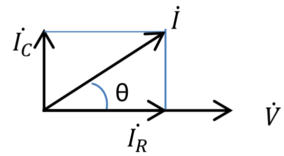
$$I_C = \frac{V}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{V}{Xc}$$

となり、この回路の全電圧$\dot{V}$は$\dot{V}_R$と$\dot{V}_C$とのベクトル和となる。

ベクトル図より $\dot{I}$は電圧$\dot{V}$よりθだけ位相が進み

$$I = \sqrt{{I_R}^2 + {I_C}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{Xc}\right)^2} = V\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Xc}\right)^2}$$

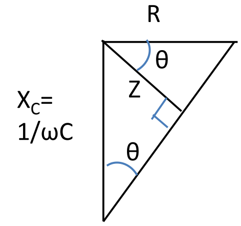


$$\therefore Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Xc}\right)^2}}$$

または　$Z = \dfrac{RXc}{\sqrt{R^2 + Xc^2}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{Xc}}{\frac{1}{R}} = \tan^{-1}\frac{R}{Xc}$$

以上のインピーダンスの関係を図に表すと右下図のようになる。



本来なら次にR−L−C並列回路をすべきだが今回は省く。

4.交流の電力

I.　交流の電力の意味

図のような回路に印加している電圧と電流の瞬時値を夫々
v[V],i[A]とすれば瞬時電力pは

$$p = vi \quad [W]$$

ここで、

$$v = V_m \sin \omega t, \qquad i = I_m \sin(\omega t - \theta)$$

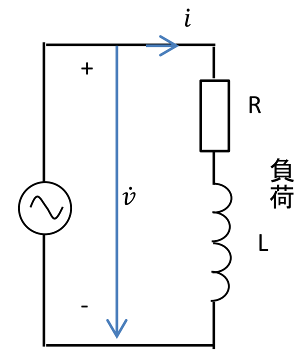
とすれば

$$p = vi = V_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \theta)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}\{(\cos\theta - \cos(2\omega t - \theta))\} \;(*1)$$

$$= VI\cos\theta - VI\cos(2\omega t - \theta)$$

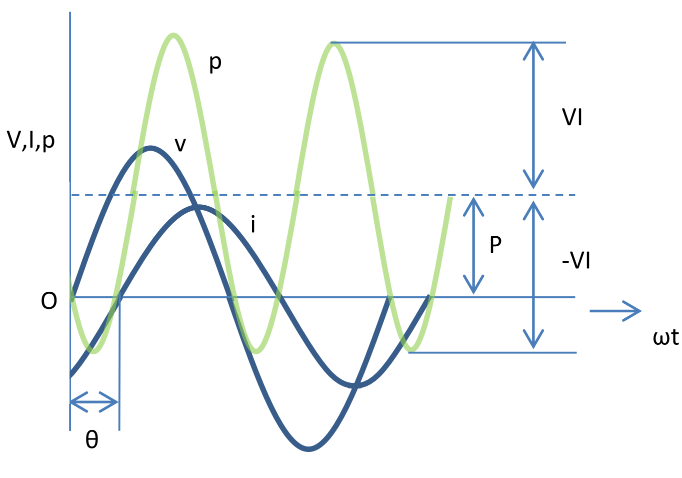
ここで、　$V = V_m/\sqrt{2}\ , I = I_m/\sqrt{2}$



上の式で、第1項は時間に関係なく一定値となり、第2項は
VIを最大値として、ωの2倍で変化することを表している。
ここで、cosの1サイクルの平均は0となるので、Pを1サイクル
について平均した値、つまり平均電力はVIcosθ
となる。一般に交流電力はこの平均電力で表され、電力Pは

$$P = VI\cos\theta \quad [W]$$

となる。
上式のθは、電流Iが電圧Vより遅れている位相角であるが、進みの
場合はcos(−θ)となる。しかし、cos(−θ)=cosθなので、遅れ、
進みのいずれの電流でも電力は上記の式となる。



(*1)三角関数の公式　$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\{(\cos(A-B) - \cos(A+B))\}$　より

4.交流の電力

II. 力率

前項で電力Pは

$$P = VI\cos\theta \ \ [W]$$

となることを示したが、これから

$$\cos\theta = \frac{P}{VI}$$

という関係がわかる。ここで、cos θ の値は、電力VIのうち、どれだけの値が電力になるかを表す率でもあるので、このcos θ を負荷の力率(power factor)という。また、位相角 θ を負荷の力率角という。つまり、

$$力率 = \cos\theta = \frac{P}{VI}$$

通常は百分率で表すので

$$力率 = \frac{P}{VI} \times 100 \quad (\%)$$

となる。

この事から分かるように、電力を送る場合、力率が小さいほど電流を大きくする必要があり。電流が大きければ、線路の熱損失が大きくなるし、電圧降下も大きくなって効率が悪い。通常力率が85%以上のものは「力率がよい」といい、85%未満のときは「力率が悪い」という。

大まかな力率の数の例

負荷	力率(%)
電球	100
テレビ	90
三相モータ	70～85
蛍光灯	60
交流溶接機器	30～40

4.交流の電力

III.　皮相電力と無効電力

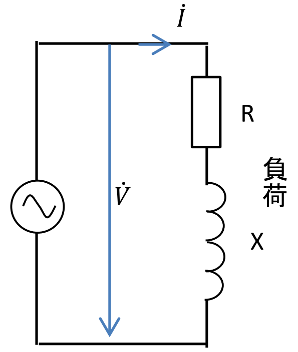
皮相電力

交流回路では、電圧VとIを掛けただけのものは電力ではなく、見かけの電力を表しているに過ぎない。このVxI を負荷の皮相電力という。つまり

$$皮相電力 = 電圧 \times 電流 \quad [VA]$$

単位はボルトアンペア[VA]またはキロボルトアンペア[kVA]を用いる。

この皮相電力は、交流発電機や変圧器などの容量を表すのに用いられる。理由は、機器の出力[kW]は負荷によって変動するが、一般の負荷に対して、どれだけの定格電圧Vのもとに、どれだけの電流Iを供給できるかを表すのには便利なためである。



無効電力

図のような回路図で、電圧を印加し、電流が流れ、負荷の力率がcos θのベクトルを描くと図のようになる。この場合$\dot{I}$は電圧$\dot{V}$と同相の$\dot{I}\cos\theta$と$\pi/2$位相がずれた$\dot{I}\sin\theta$に分解できる。

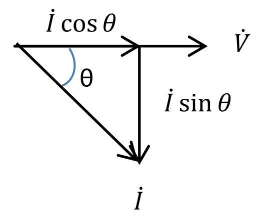
いま、電力Pを　P=VIcos θ　としてみると、Icos θ は電力P[W]を生じるのに有効な電流と考えられる。このような理由から、電圧と同相分の電流Icos θ を$\dot{I}$の有効電流という。

これに対し、Isin θ とVの電力は0であるので（力率=0のため）、Isin θ を$\dot{I}$の無効電流といい、Isin θ とVの積を無効電力という。

$$無効電力 = \mathrm{VI}\sin\theta \quad [Var]$$

単位にはバール[Var]またはキロバール[kVar]が用いられる。

また、をsin θ 無効率という。



IV.　電力、皮相電力、無効電力の関係

電力をP,皮相電力をPa,無効電力をPrとしたとき、

$$P = VI\cos\theta \quad [W]$$
$$Pa = VI \quad [VA]$$
$$Pr = VI\sin\theta \quad [Var]$$

の関係であったので、

$$\begin{aligned} P^2 + Pr^2 &= (VI\cos\theta)^2 + (VI\sin\theta)^2 \\ &= V^2I^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= V^2I^2 = Pa^2 \end{aligned}$$

$$\therefore Pa = \sqrt{P^2 + Pr^2}$$

$$\cos\theta = \frac{P}{Pa} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Pr^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{Pr}{Pa} = \frac{Pr}{\sqrt{P^2 + Pr^2}}$$

という関係がある。

これらをインピーダンスの関係から見てみると

負荷の抵抗をR, リアクタンスをX, インピーダンスをZとすると

$$V = IZ \quad [V]$$

$$R = Z\cos\theta, X = Z\sin\theta$$

より

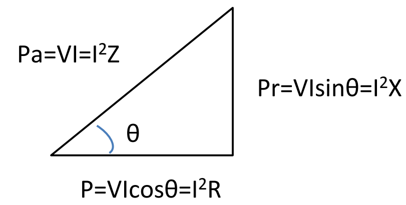
4.交流の電力

$$P = VI\cos\theta = (IZ)\times I\times\left(\frac{R}{Z}\right) = I^2R \quad [W]$$

$$Pr = VI\sin\theta = (IZ)\times I\times\left(\frac{X}{Z}\right) = I^2X \quad [Var]$$

$$Pr = VI = I^2Z \quad [VA]$$

上式から、電源から送られた電力P=Vicos θ [W]はP＝IR²[W]の電力となり、
抵抗だけで消費されることになる。



4’.記号法による交流回路の計算

I.　ここまでは、交流回路をベクトル図を用いて計算してきたが、さらに進んで、交流のベクトルを複素数で表す記号法を学ぶ。記号法は、交流回路の計算を直流回路のような計算でできる特徴がある。

II.　複素数

虚数

例えば数式　$x^2+4=0$ を解きたい場合、$x^2=-4$ となり、今までの数学では解けなかった。そこで、虚数というものを考え、$\sqrt{-2}$,$\sqrt{-3}$ などを扱えるようにした。先の式だと、

$$x=\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=2\sqrt{-1}=j2$$

($\sqrt{-2}$ なら $j\sqrt{2}$)

となる。ここで、$\sqrt{-1}$は虚数単位といい、jで表す。(数学ではiを使用するが、電気ではjを使用する)

複素数

実数と虚数からできている数を複素数という。

複素数＝実数＋虚数

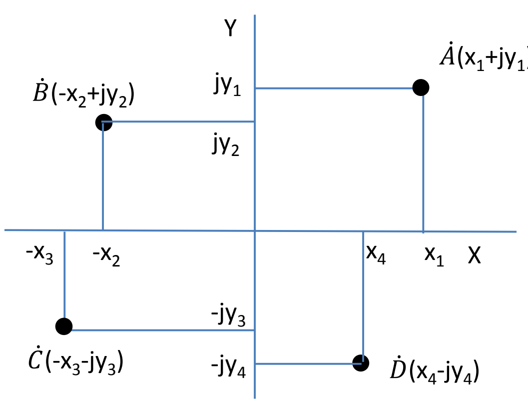
複素数を$\dot{A}$とすれば、

$$\dot{A}=a+ib$$

で表される。ここで、aを実部、bを虚部という。

III.　複素数による交流のベクトル表示

図のようなX軸に実数、Y軸に虚数をとった直角座標(複素平面という)において、各座標上の各点は図のように表される。

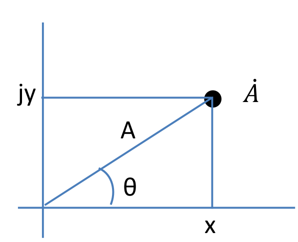


ここで、$\dot{A}$についてみてみると、絶対値と位相角θは

$$|\dot{A}|=A=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\text{実部})^2+(\text{虚部})^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{\text{虚部}}{\text{実部}}$$

であらわされる。(x_1->x,y_1->yとおいた)



4’.記号法による交流回路の計算

よって、大きさと方向を持った交流のベクトルは複素数で表わされることがわかる。
例えば、下図のような$\dot{I}$というベクトルがあったとすると、

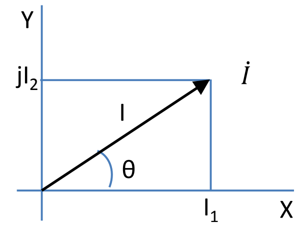
$$\dot{I} = I_1 + jI_2$$

と表せば、大きさと位相角θは

$$|\dot{I}| = I = \sqrt{{I_1}^2 + {I_2}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{I_2}{I_1}$$

となる。



逆に、電流の大きさIと位相θがわかっていれば、

$$I_1 = I\cos\theta\,, \qquad I_2 = I\sin\theta$$

であるので、

$$\dot{I} = I_1 + jI_2 = I\cos\theta + j\,\mathrm{I}\sin\theta = I(\cos\theta + j\sin\theta)$$

の複素数で表せる。
このように、交流を複素数で表す方法を記号法という。

極座標式

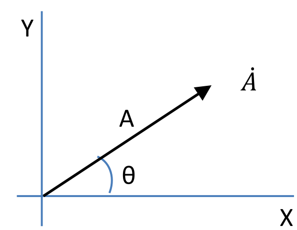
複素数は、次のような極座標でも表すことができる。(オイラーの公式)(*1)

$$\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta = \varepsilon^{j\theta}$$

従って、前頁のベクトル$\dot{A}$は

$$\dot{A} = A(\cos\theta + j\sin\theta) = \mathrm{A}\varepsilon^{j\theta}$$

とあらわせる。この極座標式では、大きさがA,位相角がθのベクトルを
端的に表していて便利である。



また、以下のように表すこともある

$$\dot{A} = A\varepsilon^{j\theta} = A\angle\theta$$

もし位相角が負の場合は、$\angle{-\theta}$等と書く。

以上の記号法の表し方をまとめると以下のようになる。

- 直交座標式　　$\dot{A} = x + jy$
- 三角関数式　　$\dot{A} = A(\cos\theta + j\sin\theta)$
- 極座標式　　$\dot{A} = A\varepsilon^{j\theta}$, $\dot{A} = A\angle\theta$

(*1):ε(イプシロン)は自然対数の底: 2.71828 –)

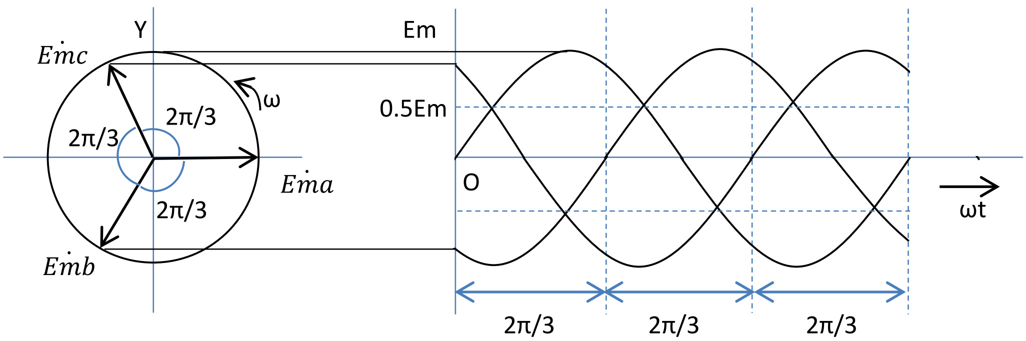
5.三相交流回路

I.　三相交流回路

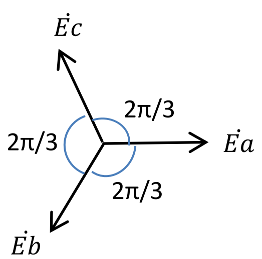
波形とベクトル

三相起電力の波形と最大値の回転ベクトルの関係は下図(1)のようになる。

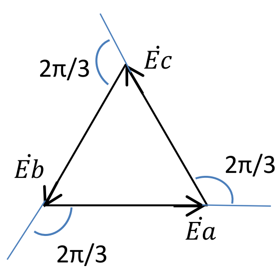
実効値の静止ベクトルでは図(2)(Y結線の時)または(3)(Δ結線の時)のようになる。



図(1)



図(2)



図(3)

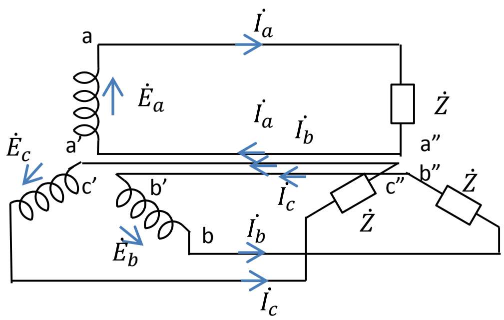
5.三相交流回路

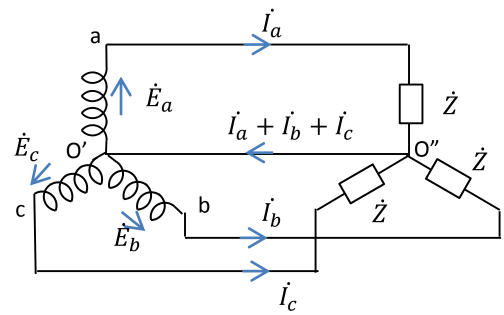
II.　星形(スター)結線

下図左のように三相電源の各相に $\dot{Z} = Z\angle\theta$ のインピーダンス負荷を接続したとき、各相に流れる電流は、

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{E}_a}{\dot{Z}}, \dot{I}_b = \frac{\dot{E}_b}{\dot{Z}}, \dot{I}_c = \frac{\dot{E}_c}{\dot{Z}}$$

となる。各電流はぞれぞれ同大で互いに2π/3[rad]の位相差を持つ電流で、各相の起電力よりぞれぞれ θ だけ遅れた電流となる。このような電流を対称三相電流という。





この結線で、電源側のa',b',c'、負荷側のa",b",c"各端子を一括して、上図右のように $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c$ という合成電流が流れる一本にしても問題ない。この結線法を三相4線式という。

ここで、各電流が同大で互いに2π/3[rad]の位相差を持つ電流である場合は、

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$$

となるので、電源のO'とO"を接続している線を省いても全体の電流分布は変わらない。このようにして出来た下図左のような結線法を星形(スター)結線、またはY結線という。

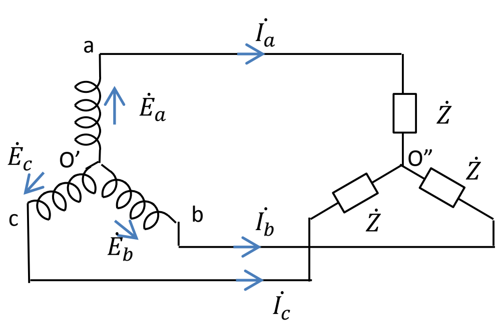
下図左において、電源の各コイルの端子電圧(Ea～Ec)や負荷の各インピーダンスの端子電圧を相電圧、または星形電圧といい、3本の電源間の電圧、Vab,Vbc,Vcaを線間電圧という。また、各線に流れる電流を線電流といい、各相に流れる電流を相電流という。(スター結線の場合は線電流と相電流は等しい)

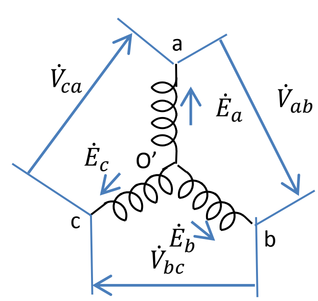
さらに、O',O"を中性点といい、上図右のように両中性点を接続している線を中性線という。

各電圧、電流の関係については、

$$線間電圧 = \sqrt{3} \times 相電圧\ (Vab = \sqrt{3}Ea)$$

線電流=相電流





5.三相交流回路

III.　三角結線

下図左のように三相電源の各相に $\dot{Z} = Z\angle\theta$ のインピーダンス負荷を接続したとき、負荷に流れる電流は、

$$\dot{I_a}' = \frac{\dot{E_a}}{\dot{Z}}, \dot{I_b}' = \frac{\dot{E_b}}{\dot{Z}}, \dot{I_c}' = \frac{\dot{E_c}}{\dot{Z}}$$

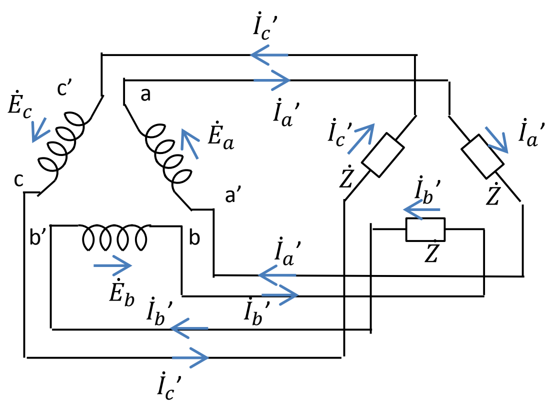
となる。各電流はそれぞれ各相の起電力より位相が θ 遅れた電流となる。

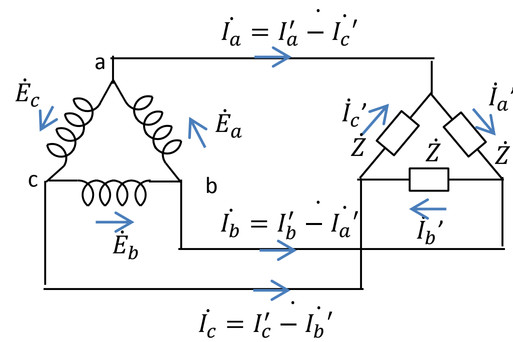
いま、下右図のように、電源も負荷も閉回路に結線して、両方を3本の線で結線しても、電源や負荷に流れる電流には変化がない。その代り、各線電流は夫々

$$\dot{I_a} = \dot{I_a'} - \dot{I_c}'$$
$$\dot{I_b} = \dot{I_b'} - \dot{I_a}'$$
$$\dot{I_c} = \dot{I_c'} - \dot{I_b}'$$

になる。

下右図のように閉回路に結線することを三角結線、またはΔ(デルタ)結線という。





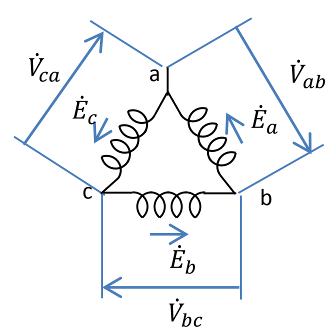
各電圧、電流の関係については、
各相の端子間には各相の起電力がそのまま端電圧となって
現れるので

$$\dot{V_{ab}} = \dot{E_{ab}}, \dot{V_{bc}} = \dot{E_b}, \dot{V_{ca}} = \dot{E_c}$$

線間電圧 ＝ 相電圧

また、相電流と線電流については

線電流 ＝ $\sqrt{3}$ × 相電流



5.三相交流回路

IV. 三相の電力

三相回路の電力は、その結線に関係なく三つの相の電力の和になる。従って

Va, Vb, Vc：相電圧、　　Ia, Ib, Ic：相電流

θa, θb, θc：各相の力率角

P：総電力　　Pa, Pb, Pc：各相の電力

とすれば、

$$P = Pa + Pb + Pc$$
$$= VaIa\cos\theta a + VbIb\cos\theta b + VcIc\cos\theta c$$

となる。ここで、対称三相電源で各相の負荷が等しい，平衡三相負荷であれば

$$Va = Vb = Vc = Vp, \quad Ia = Ib = Ic = Ip, \quad \theta a = \theta b = \theta c = \theta p$$

となる。このような回路を平衡三相回路という。

従ってこの場合、上記の電力の式は

$$P = 3VpIp\cos\theta p$$

となる。これを、線間電圧Vと線電流Iで考えると

Y結線：$Vp = \frac{V}{\sqrt{3}},\ Ip = I$

Δ結線：$Vp = V,\ Ip = \frac{I}{\sqrt{3}}$

であるので、Y結線でも、Δ結線でも総電力Pは次の式となる。

$$P = \sqrt{3}VI\cos\theta$$

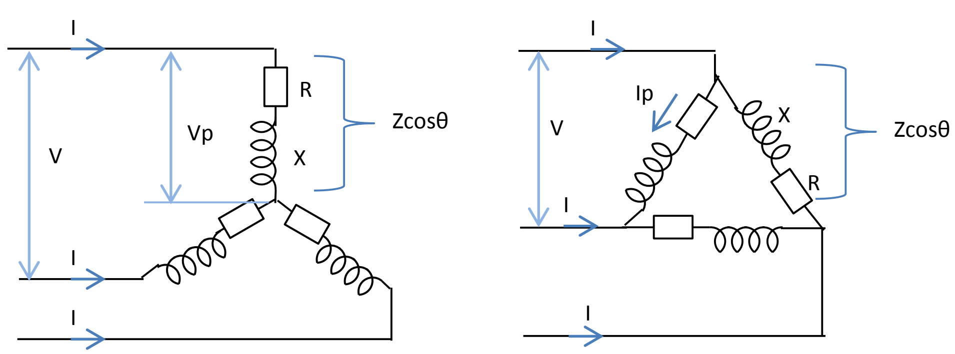
ここで注意することは、θは負荷の力率角、つまりVpとIpの位相差であって、線間電圧Vと線電流Iの位相差ではないということである。

上記の電力の式はひじょう～に重要である。なぜなら、電源あるいは負荷がY結線であってもΔ結線であっても、関係なく、単に線間電圧Vと線電流Iと負荷の力率cosθのみから総電力Pが算出できるからである。

また、三相全体での皮相電力と無効電力は以下のように計算される。

皮相電力 $\mathrm{Pa} = \sqrt{3}VI \quad [VA]$

無効電力 $Pr = \sqrt{3}VI\sin\theta \quad [Var]$



6.過渡現象

I.　過渡現象とは

電気回路において、その回路の状態が変化したとき、例えば電圧やR,L,Cなどの定数が変化すれば、エネルギーの移動がおこって、電流はある定常な状態から次の定常な状態へと変化しようとする。しかし、LやCがあると、エネルギーの変化を妨げる方向に逆起電力を生じるため、変化は一瞬ではなく時間がかかるようになる。この間の状態を過渡状態といい、起きている現象を過渡現象という。

II.　R−L直列回路

電圧印加時

下図のようなR−L直列回路において、スイッチSを時間t=0に閉じ、直流電圧Eを加えたとき、t秒後に流れる電流をiとすれば、Rの両端の電圧降下はRi,Lの両端に生じる逆起電力はL・di/dtであるので

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

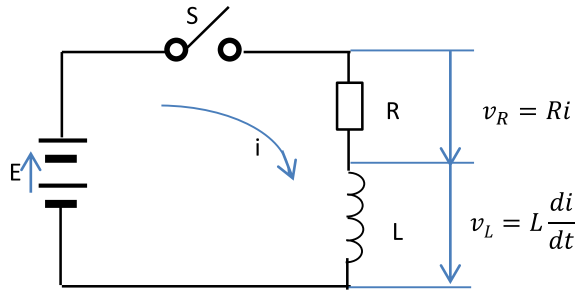
これを解けば（計算過程は省く）

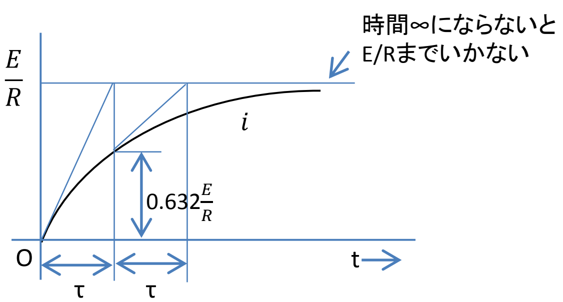
$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

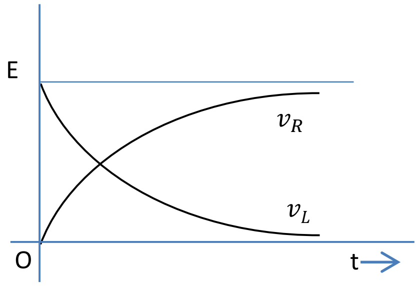
$$\left(\tau = \frac{L}{R}\right)$$

となる。(*1）ここで、τ (*2)を時定数といい単位は[sec]である。時定数が大きいと過渡現象が長く続くことになる。また、式中$e^{-\frac{t}{\tau}}$は時間t=∞で0になることを表す。

この電流の変化を表せば、下段図のようになる。







時間が時定数 τ だけ経った時（ t= τ ）の電流iについては、

$$e^{-\frac{\tau}{\tau}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0.368$$

よって

$$i = \frac{E}{R}(1 - 0.368) = 0.632\frac{E}{R}$$

(*1)この場合のeは電圧ではなく、自然対数の底e=2.718―である。ε（イプシロン）で表すこともある。
(*2)τ：「タウ」と読む

6.過渡現象

短絡時

次に、下図のように、起電力Eを加え、電流I=E/Rが流れている時（定常状態）、スイッチSを接点aからbへ倒し、回路を短絡すれば、Lに蓄えられていた電磁エネルギーが放出して過渡現象を起こす。この時は

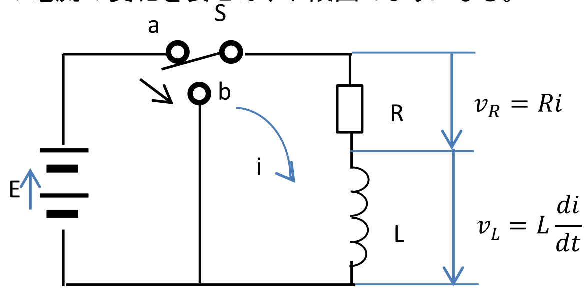
$$0 = Ri + L\frac{di}{dt}$$

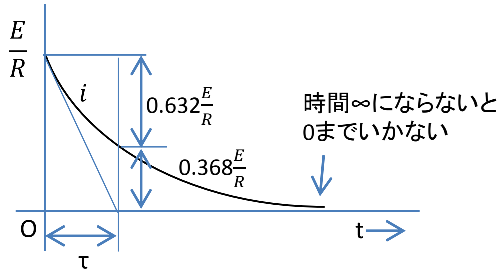
であるので、これを解けば（計算過程は省く）

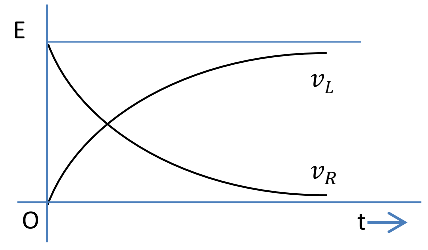
$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\left(\tau = \frac{L}{R}\right)$$

となる。この電流の変化を表せば、下段図のようになる。







6.過渡現象

III.　R–C直列回路

電圧印加時（充電）

左下図のようなR–C直列回路において、スイッチSを時間t=0にa側に閉じ、直流電圧Eを加えたとき、t秒後に流れる電流をiとすれば、ｺﾝﾃﾞﾝｻの電気量をq,電圧をvcとしたとき

$$i = \frac{dq}{dt}$$

であり、

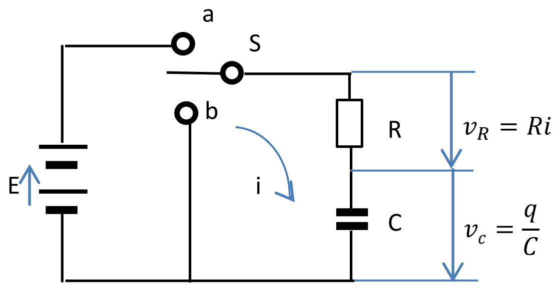
$$E = Ri + vc = Ri + \frac{q}{C}$$

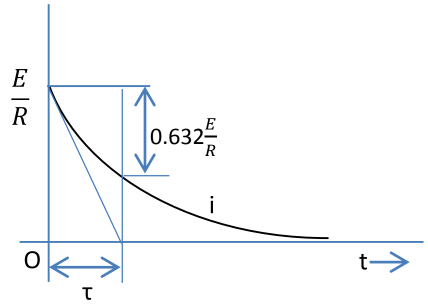
これを解けば（計算過程は省く）

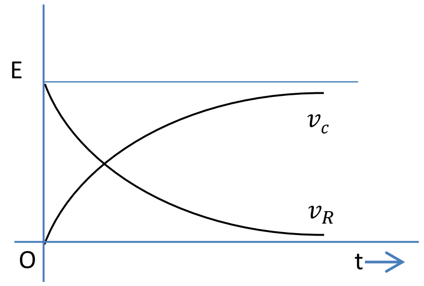
$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

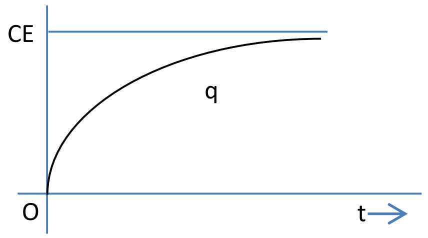
$$(\tau = CR)$$

となる。この電流の変化を表せば、右下図のようになる。









6.過渡現象

短絡時（放電）

今度は、Q=CEで充電されているコンデンサで（定常状態）、スイッチSを時間t=0にb側に閉じ、放電したとき、t秒後に流れる電流をiとすれば、ｺﾝﾃﾞﾝｻの電気量をq,電圧をv_cとしたとき

$$0 = Ri + v_c = Ri + \frac{q}{C}$$

これを解けば（計算過程は省く）

$$i = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$(\tau = CR)$$

となる。この電流の変化を表せば、右下図のようになる。

（−なので、放電により電流の向きが逆となる）