電気基礎Ⅱ

1.正弦波交流
2.交流のベクトル表示
3.基本交流回路
4.交流の電力
4’記号法による交流回路の計算
5.三相交流回路
6.過渡現象

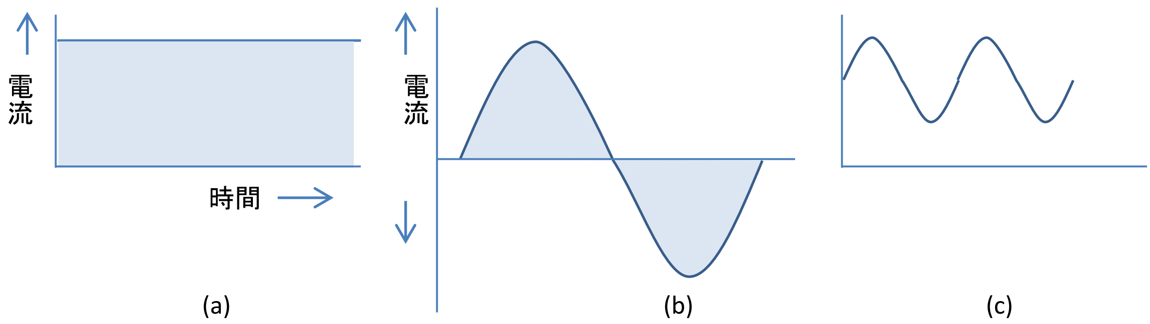
参考文献:新編　電気理論　Ⅱ　[東京電機大学出版局]

1.正弦波交流

I. 交流と直流

図(a)に示すように、時間に対し、電流の大きさと流れる方向が一定しているものを直流(direct current:DC)という。これに対し、(b)のように電流の大きさと方向が時間とともに周期的に交互に変化するものを交流(alternating current:AC)という。また、(c)のように直流と交流が重なっているものを脈動電流(pulsating current)という。

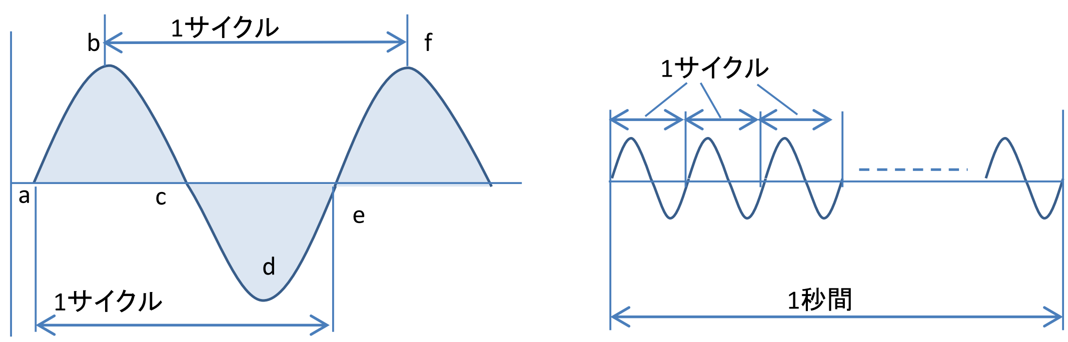
交流を流すための起電力は同じように交流起電力(alternating e.f.m)、電圧を交流電圧(alternating voltage)という。



II. 周波数、周期、波長

任意の交流波形において、その交流波形が変化をして、元の状態になるまでをサイクル、または周波という。下図の波形でいえば、aからeまでの変化、またはbからfまでの変化を1サイクルという。また、この1サイクルにかかる時間[s]を周期(period)という。

また、1秒間のサイクル数を周波数(frequency)といい、ヘルツ[Hz]で表す。



いま、周波数をf[Hz]、周期をT[s]とすれば

$$T = \frac{1}{f} \quad [s]$$

$$f = \frac{1}{T} \quad [Hz]$$

また、空間を電磁波の波動が伝搬する場合や、交流信号が線路上を伝搬していくときに、その1サイクルに相当する波の長さを波長(wave length)という。

周波数をf[Hz]、波長をλ(*1)[m]、波の伝搬速度をc[m/s]とすれば

$$f\lambda = c$$

$$\lambda = c/f$$

(*1) λ :ラムダと読む。

1.正弦波交流

III. 参考

電波の周波数による分類例(wikipediaよりほんの一部抜粋)

周波数	波長	電波法の表示	主な用途例
300kHz – 3MHz	10m – 1km	MF	中波ラジオ放送、アマチュア無線
3 – 30MHz	10m – 0.1km	HF	短波ラジオ放送、アマチュア無線
30MHz – 0.3GHz	1 – 10m	VHF	FMラジオ放送、アマチュア無線 地上アナログTV
0.3 – 3GHz	0.1 – 1m	UHF	UHFテレビ放送、地上デジタルTV放送、パーソナル無線、携帯電話,無線LAN
3 – 30GHz	10mm – 0.1m	SHF	衛星(BS,CS)TV放送、無線LAN

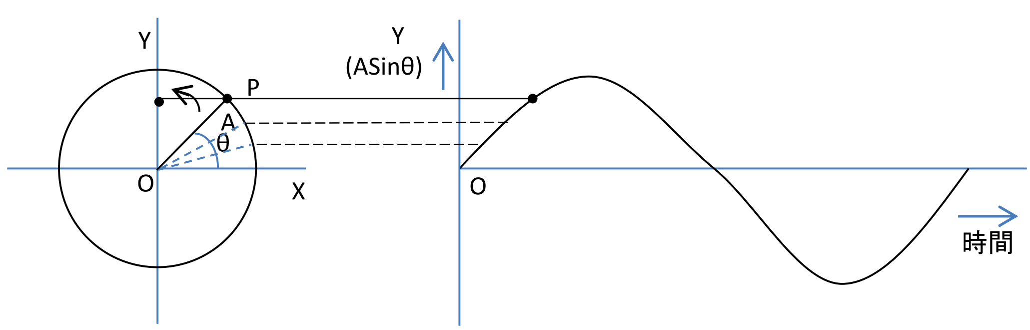
IV. 問題:

上の周波数と波長の関係を見れば、電磁波の大まかな伝搬速度がわかりますね。計算で出してみましょう。

V. 角速度と正弦波交流の一般式

正弦波(sin波)

長さAが角度θである位置P点にある場合、Y軸に投影する高さの値はAsinθで表される。次にこのAが時間とともに回転している時、P点の推移を時間を横軸にとって表せば、下図右のようになる。つまり、交流波形はAsinθの関係で表せることになる。



ここで、

交流の周波数がf[Hz]であるとき、360° は2π[rad]なので(弧度法)、1サイクル当たり2π[rad](*1)だけ変化する。よって1秒間には2πf[rad]変化する。このように、1秒間に変化する角度を角速度、または角周波数といい、ラジアン/秒[rad/s]で表す。角速度をωとおけば

$$\omega = 2\pi f \quad [\frac{rad}{s}]$$

(*1)rad:ラジアンと読む。

よって、起点Oからt秒後における角度θは

$$\theta = \omega t \quad [rad]$$

であらわされる。
従って、A$\sin\theta$のAを**最大値** Emとし、正弦波の瞬時値をeとすれば以下の式で表せる。

$$e = Em \sin \omega t$$

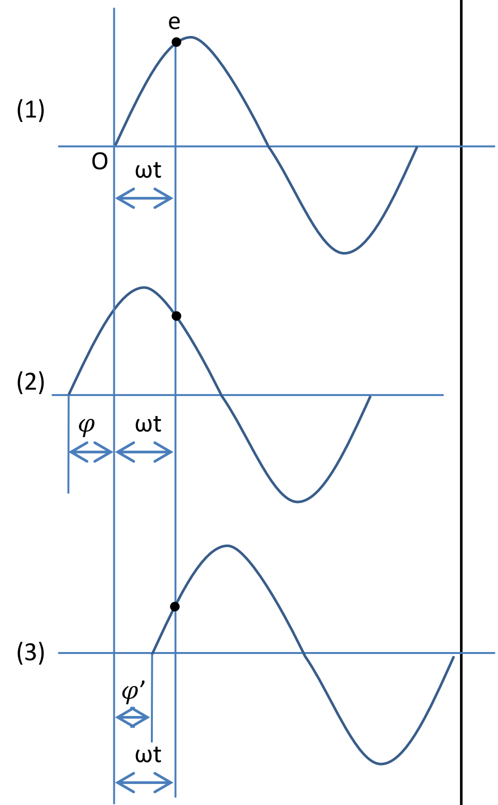
上式においてはθ=0の時を時間tの起点としたが、起点を任意に定めるには、図のように角φの点を起点とした場合は

$$e = Em \sin(\omega t + \varphi)$$

となる。また、角φ'のときは

$$e = Em \sin(\omega t - \varphi')$$

であらわされる。



上式$(\omega t + \varphi)$を時間tにおける位相(phase)といい、t=0 における位相φを初位相という。
(1)を基準にとると、(2)はφ[rad]の進み、(3)はφ'[rad]の遅れといい、2つの交流の位相の差を位相差、あるいは相差という。位相差が0の場合は同相という。

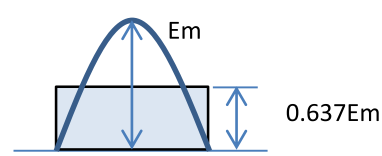
VI.　交流の大きさの表し方

平均値

交流の平均値は、半周期間の瞬時値の平均をいう。

平均値は最大値をEm、平均値をEavとおくと以下の値となる。

$$Eav = \frac{2}{\pi} Em = 0.637Em$$



参考：以下は求め方

$$Eav = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Em \sin\theta d\theta = \frac{Em}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$$
$$= \frac{Em}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{Em}{\pi}[-\cos\pi + \cos 0] = \frac{2Em}{\pi}$$

実効値

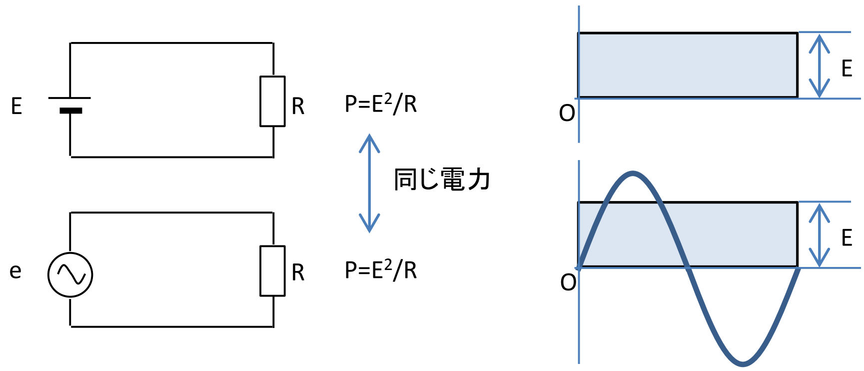
交流の実効値は、その交流と同じ熱作用(電力)を表す直流の値で表す。
または、交流の瞬時値の2乗を1周期平均したものの平方根である。

実効値は最大値をEm、実効値をErmsとおくと以下の値となる。

$$Erms = \frac{Em}{\sqrt{2}} = 0.707Em$$

考え方は次ページ

1.正弦波交流



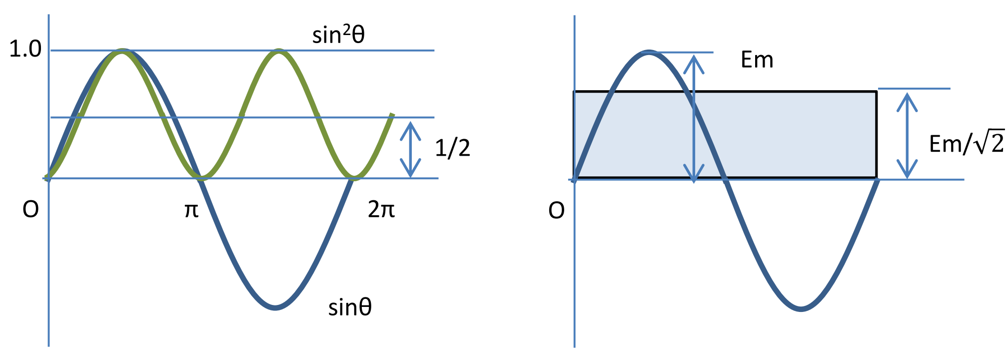
$\sin^2\theta$ と実効値の関係を表すと下図のようになる。

$\sin^2\theta$の曲線は最大値1とすれば1/2の高さを中心に2倍の周波数の正弦波となるので、

$$\sin^2\theta\ の平均 = \frac{1}{2}$$

よって、e^2 の平均=$\frac{1}{2}{E_m}^2$ 　となるので

$$Erms = \sqrt{e^2の平均} = \sqrt{\frac{{E_m}^2}{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$



参考：実効値の計算式

$$Erms = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Em^2 \sin^2\theta\, d\theta} = \sqrt{\frac{Em^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta}$$

ここで

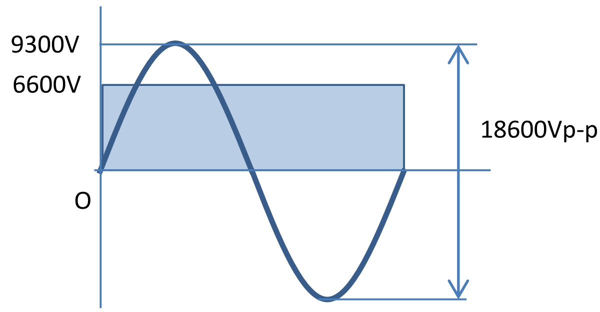
$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\pi}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\therefore Erms = \sqrt{\frac{Em^2}{2\pi}\pi} = \frac{Em}{\sqrt{2}}$$

1.正弦波交流

一般に交流の電圧、電流、起電力の大きさは、その波形のいかんにかかわらず実効値で表す。

例えば、高圧6600V(実効値)であったら、最大値は9300Vとなり、波形の最大振幅(p−pで表す)では18600Vとなる。(思ったより大きい)



VII.　波高率と波形率

最大値と実効値の比を波高率、実効値と平均値の比を波形率という。

$$\text{波高率} = \frac{\text{最大値}}{\text{実効値}}$$

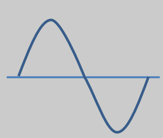
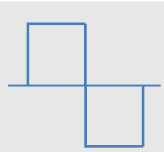
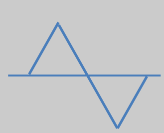
$$\text{波形率} = \frac{\text{実効値}}{\text{平均値}}$$

正弦波交流では、

$$\text{波高率} = \frac{Im}{I} = \frac{Im}{Im/\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1.414$$

$$\text{波形率} = \frac{I}{Im} = \frac{Im/\sqrt{2}}{2Im/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.111$$

波形の種類と実効値、波形率、波高率の例

波形と名称	実効値	波形率	波高率
正弦波 	$\frac{Em}{\sqrt{2}} = 0.707Em$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11$	$\sqrt{2} = 1.414$
方形波 	Em	1	1
三角波 	$\frac{Em}{\sqrt{3}} = 0.577Em$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$	$\sqrt{3} = 1.732$

2.交流のベクトル表示

I. 回転ベクトル

図に示すように、交流 $i{=}Imsin\omega t$ の最大値Imに等しい大きさのベクトルOPがあり、これがOXの位置から角速度ωで反時計方向に回転するとする。

このベクトル$\overrightarrow{OP}{=}\dot{I_m}$ (*1)の時間tでの、Y軸へ投影した長さOpは

$$i_1 = I_m \sin\omega\, t_1$$

の瞬時値を表す。

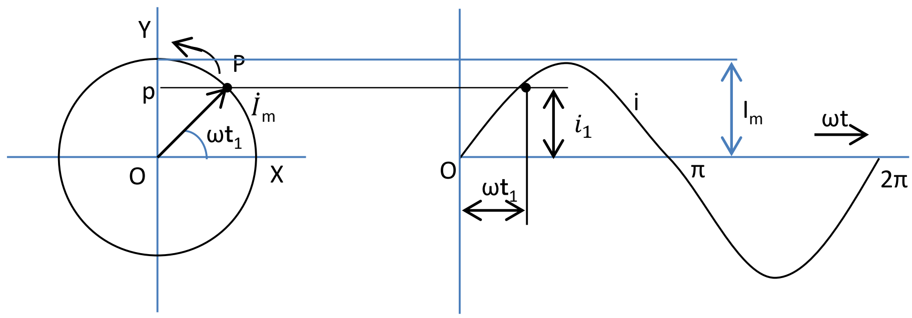
従って、この回転するベクトル（回転ベクトルという）$\dot{I_m}$の時間tが変化したときのY軸への投影は$i{=}I_m sin\omega t$ の波形を表すことになる。また、例えば$\dot{I_m}$ よりθだけ位相が進んだeがあったとすれば、eは

$$e = Em\sin(\omega t + \theta)$$

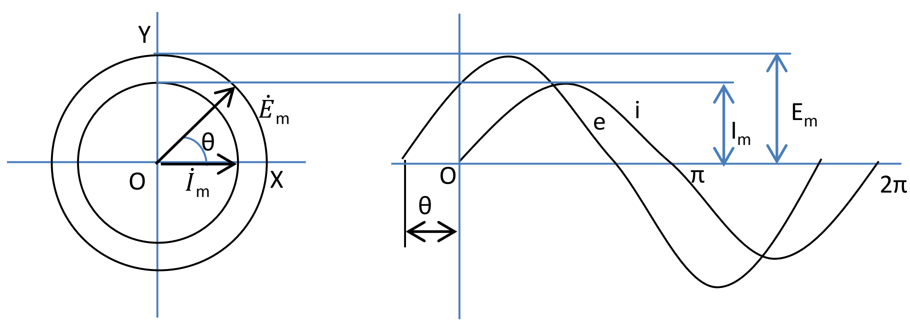
で表すことができる。

従って、正弦波交流は、

その大きさが最大値に等しく、初位相θの位置を時間tの起点として、角速度ωで回転する回転ベクトルで表される。さらに、回転ベクトルをY軸に投影したものは交流の瞬時値を表す。



例えば、同じ周波数で、位相差のある、$\dot{I_m}$ $\dot{E_m}$の回転ベクトルは下図のように表せる



(*1)ベクトルを表すのに、記号の上に・(ドット)をつける

2.交流のベクトル表示

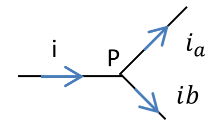
II.　正弦波交流の合成

交流の和

交流回路において、接続点Pに

$$i_a = I_{am}\sin\omega t, \qquad i_b = I_{bm}\sin(\omega t + \theta)$$

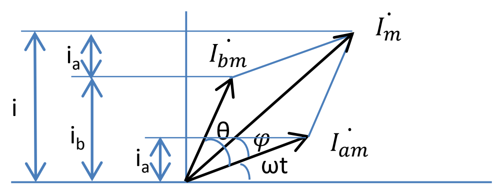
の電流（周波数は同じ）が流出したとしたとき、流入する電流iは



$$i = i_a + ib$$

ここで、電流i_a,i_bの回転ベクトルを$\dot{I}_{am}$, $\dot{I}_{bm}$とすると、そのベクトル和を$\dot{I}_m$としたとき、$\dot{I}_m$は以下の式に表され、図では下図のようになる。

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{am} + \dot{I}_{bm}$$



図からわかるように、$\dot{I}_m$のY軸上の投影は二つの交流の瞬時値の和を表す。さらに、$\dot{I}_{am}$と$\dot{I}_{bm}$は同じ角速度ωで回転するので、$\dot{I}_m$も同じく回転する。この関係はどの瞬時にも成立するので、$\dot{I}_m$は

$$i = i_a + i_b = I_m\sin(\omega t + \varphi)$$

の交流を表しているといえる。

交流の差

上記回路において、ibについて考えてみると

$$i_b = i - i_a$$

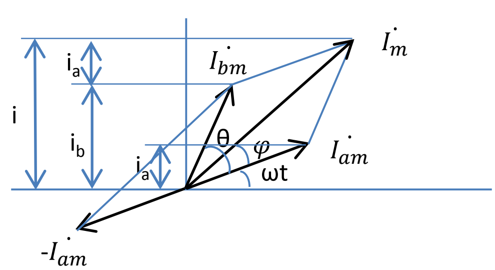
これはまた、

$$i_b = i + (-i_a)$$

でもあるので、ibはiと−iaの和と考えられる。−iaは

$$-i_a = -I_m\sin\omega t$$

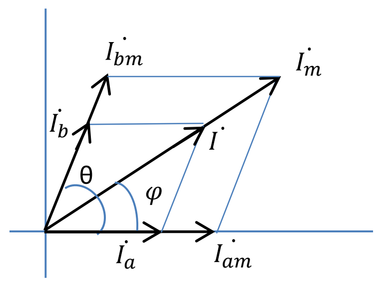
となるので、$\dot{I}_{bm}$は$\dot{I}_m$と−$\dot{I}_{am}$のベクトル和を求めればよいことになる。



2.交流のベクトル表示

III.　静止ベクトル

同じ周波数の二つの正弦波交流をベクトルで表すと、どの瞬間でも一定の位相差を保ちながら回転している。そのため、任意の位置でベクトル群を静止させてもそれぞれの位相関係は変わらない。ここで、前述の$\dot{I}_m$、$\dot{I}_{am}$、$\dot{I}_{bm}$各電流をωt=0の位置で静止させ、（これを静止ベクトルという。）さらに、各ベクトルを$1/\sqrt{2}$倍した$\dot{I}$、$\dot{I}_a$、$\dot{I}_b$の実効値であらわすことにする。これでは、瞬時値を表すことができないが、交流の実効値とそれぞれの間の関係を表すことができ、実用的である。通常は、この実効値の静止ベクトルで交流を表す。

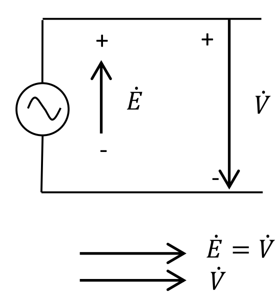


IV.　ベクトルの正の方向

起電力と電圧の正の方向を次のように約束する。（本により違うよ）

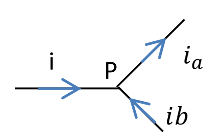
・起電力の正の方向は、電位上昇の正の方向に矢印をつけて表す

・電圧の正の方向は、電圧降下の正の方向に矢印をつけて表す



ベクトルの計算例

図のような回路の接続点Pにおいて、*i,ia,ib*の正の方向を図のようにとったとき、*ia,ib*の実効値は共に10Aで、*ib*は*ia*に対し、2π/3[rad]位相が遅れているとする。この時の、*i*の実効値及び*ia*に対する位相を求める。



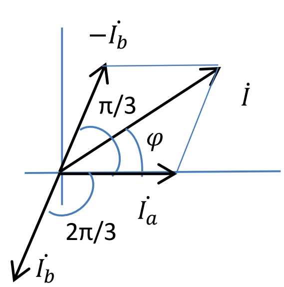
[解]

*i*に対する実効値を*I*、*ia*に対する実効値を*Ia*、*ib*に対する実効値を*Ib*とする。

ベクトルを描けば、右図のようになる。

*Ia*を基準として、2π/3遅れた位置に*Ib*を描き、最初の図から*Ia=I+Ib* より *I=Ia-Ib* なので、*-Ib*を描き、これと*Ia*をベクトル的に加える。$|\dot{I}_a| = |-\dot{I}_b| = 10A$、位相差φは、(π/3)/2=π/6 なので

$$I = |I_a|\cos\frac{\pi}{6} \times 2 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 17.32 \quad A$$

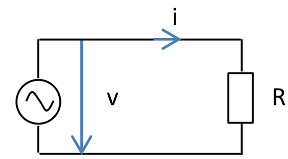


3.基本交流回路

I.　抵抗回路

右図のように、R[Ω]の抵抗に交流電圧v[V]を加えたとき、
流れる電流をi[A]とすれば、

$$i = \frac{v}{R}$$



であるので、

$$v = V_m \sin \omega t$$

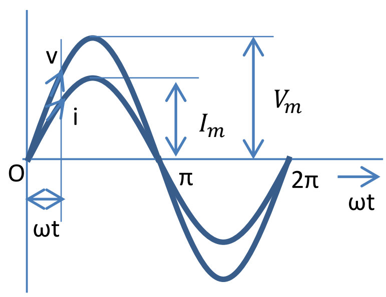
$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t$$

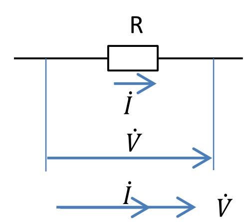
よって、実効値の電圧をV，電流をIとすれば

$$I = \frac{V}{R}$$

ただし、$I=Im/\sqrt{2}$、$V=Vm/\sqrt{2}$

vとiの位相は共にωtで同位相なので、ベクトル$\dot{V}$,$\dot{I}$も同位相となる。



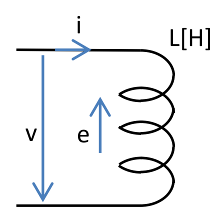


II.　自己インダクタンス回路

自己インダクタンスLのコイルの電流iと誘導起電力eの方向を図のように定めると

$$e = L\frac{di}{dt}$$

電流iが$i = I_m \sin \omega t$　とすれば、



$$\begin{aligned} e &= L\frac{dI_m \sin \omega t}{dt} = LI_m \cdot \frac{d \sin \omega t}{dt} \\ &= \omega L I_m \cos \omega t \\ &= E_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

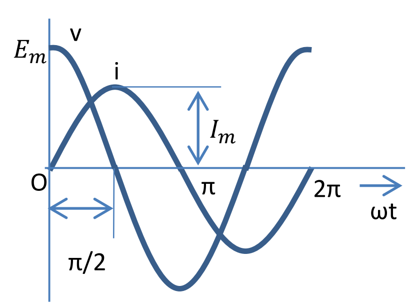
$(E_m = \omega L I_m = e$の最大値)

これより、L[H]の自己インダクタンスにを持つコイルにｉが流れると、$\pi/2$[rad]位相の進んだ起電力e（逆起電力という）が誘導され、その大きさは

最大値：$E_m = \omega L I_m$，　$I_m = \frac{E_m}{\omega L}$

実効値：$E = \omega L I$，　$I = \frac{E}{\omega L}$

となる。



ここで、端子a–b間に加えた電圧vと誘導起電力eは同相同大なので

$$v = e$$

つまり

$$V = \omega LI\ , \qquad I = \frac{V}{\omega L}$$

であり、電流$\dot{I}$は$\dot{V}$よりπ/2[rad]位相がおくれる。また、電流はωLによって決定される。このωLを誘導リアクタンスといい、X_LまたはXで表し、単位はオーム[Ω]を用いる。
つまり、

$$X_L = \omega L = 2\pi f L \quad [\Omega]$$

であり、周波数fに比例して変化する。

次に電力については、(以下計算過程は省く)

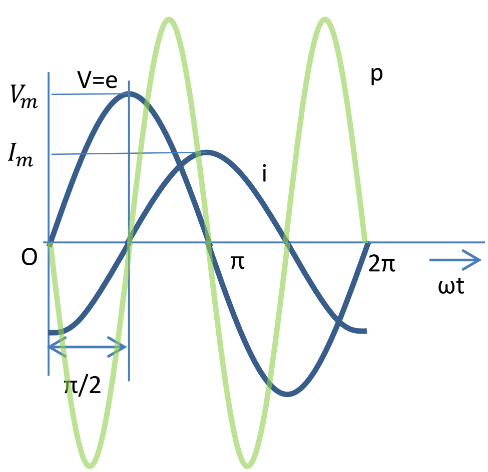
瞬時値:$p = -\frac{Im^2 \omega L}{2} \sin 2(\omega t)$

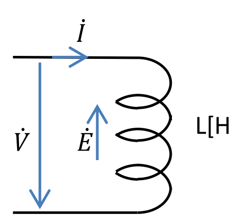
最大値:$P_m = \frac{E^2}{\omega L}$

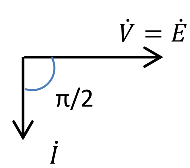
平均値:$P_{av} = 0$

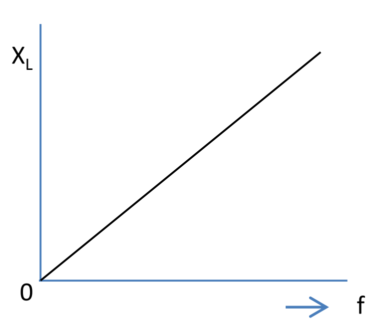
つまり、インダクタンスのみの回路においては、電力を消費することなく、電源からエネルギーを受け取り、一度これを蓄え、次に再び電源に返すことになる。
また、Lに蓄えられる磁気エネルギーの平均値w_Lは以下となる

$$w_L = \frac{1}{2} L I^2$$









参考文献:電気回路論　電気学会

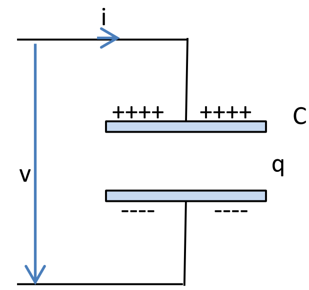
3.基本交流回路

III.　静電容量回路

図のように、C[F]の静電容量をもったコンデンサにvを印加すると
コンデンサの両極板にq[C]の電荷が蓄えられ

$$q = Cv$$

の関係がある。



電圧v が増減すれば、電荷qもそれに比例して増減し、それに伴って
電流ｉが生ずる。電流は以下のようになる

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \Rightarrow C\frac{dv}{dt}$$

Cに　$v = V_m \sin \omega t$ を加えたとき流れる電流iは

$$i = C\frac{dv}{dt} = C\frac{dV_m \sin \omega t}{dt}$$

$$= \omega C V_m \cos \omega t = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(I_m = \omega C V_m)$$

従って

最大値：$I_m = \omega C V_m = \frac{V_m}{\frac{1}{\omega C}}$

実効値：$I = \frac{V}{\frac{1}{\omega C}}$

であり、電流$\dot{I}$は$\dot{V}$よりπ/2[rad]位相が進む。

上記式より、電流は1/ωCにより決まるので、この1/ωCを容量リアクタンスといい、XcまたはXで表し、単位はオーム[Ω]を用いる。つまり、

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad [\Omega]$$

となり、リアクタンスは周波数に反比例して変化する。

次に電力については、（以下計算過程は省く）

瞬時値：$p = E^2 \omega C \sin 2(\omega t)$

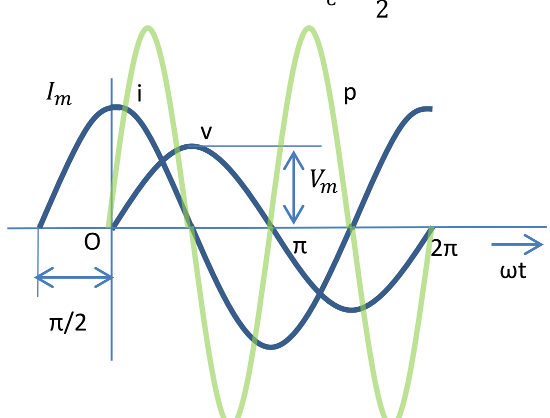
最大値：$P_m = \frac{I^2}{\omega C}$

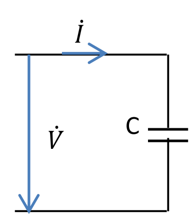
平均値：$P_{av} = 0$

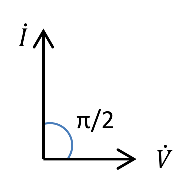
つまり、インダクタンスと同様に、電力は消費されない。

また、Cに蓄えられる静電エネルギーの平均値W_Cは以下となる

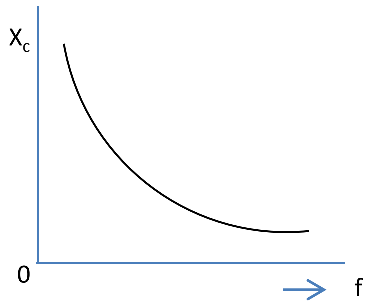
$$w_C = \frac{1}{2}CE^2$$







参考文献：電気回路論　電気学会



IV. R-L直列回路

図のように、抵抗R[Ω]と自己インダクタンスL[H]を直列に接続し、実効値V[V],周波数f[Hz]の正弦波電圧を加えた時に、電流I[A]が流れたとする。

$\dot{V}_R$は$\dot{I}$と同相で

$$V_R = RI \quad [V]$$

$\dot{V}_L$は$\dot{I}$より位相がπ/2進む。ωL=X_Lとすると、

$$V_L = \omega LI = XLI \quad [V]$$

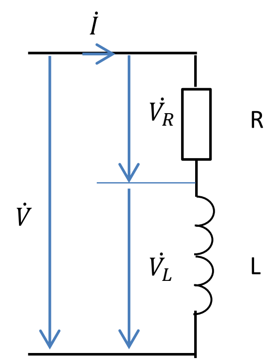
となり、この回路の全電圧$\dot{V}$は$\dot{V}_R$と$\dot{V}_L$とのベクトル和となる。

右下のベクトル図では$\dot{I}$を基準ベクトルにしている。

ベクトル図よりVは

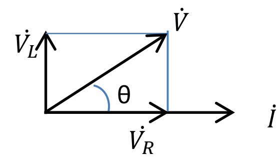
$$V = \sqrt{V_R{}^2 + V_L{}^2}$$

$$= \sqrt{(RI)^2 + (X_L I)^2} = I\sqrt{R^2 + (X_L)^2}$$



$$\therefore I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L)^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{V_L}{V_R} = \tan^{-1}\frac{X_L}{R}$$

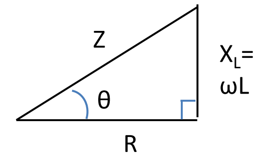


このように、R-L直列回路では、電圧に対しθ位相が遅れた電流Iが流れ、Iを制限するものは$\sqrt{R^2 + (X_L)^2}$である。

交流回路では、このように直流回路のオームの法則に相当して電流を制限するものをインピーダンス(impedance)といい、記号はZで表し、単位はオーム[Ω]を用いる。

ゆえに、この場合のインピーダンスは以下となる。

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L)^2} \qquad [\Omega]$$



3.基本交流回路

V.　R−C直列回路

図のように、抵抗R[Ω]とコンデンサC[F]を直列に接続し、実効値V[V],周波数f[Hz]の正弦波電圧を加えた時に、電流I[A]が流れたとする。

$\dot{V}_R$は$\dot{I}$と同相で

$$V_R = RI \quad [V]$$

$\dot{V}_C$は$\dot{I}$より位相がπ/2遅れる。1/ωC=Xcとすると、

$$V_C = \frac{1}{\omega C} I = XcI \quad [V]$$

となり、この回路の全電圧$\dot{V}$は$\dot{V}_R$と$\dot{V}_C$とのベクトル和となる。

ベクトル図よりVは

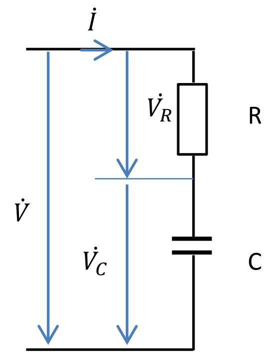
$$V = \sqrt{V_R{}^2 + V_C{}^2}$$

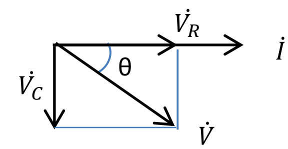
$$= \sqrt{(RI)^2 + (XcI)^2} = I\sqrt{R^2 + Xc^2}$$

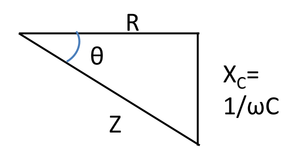
$$\therefore I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + Xc^2}} = \frac{V}{Z}$$

ここで　$Z = \sqrt{R^2 + Xc^2}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1}\frac{Xc}{R}$$







本来なら次にR−L−C直列回路をすべきだが今回は省く。

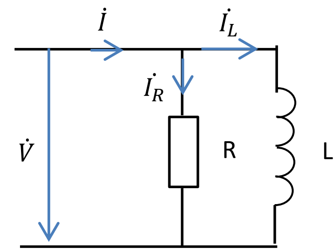
3.基本交流回路

IV.　R–L並列回路

図のように、抵抗R[Ω]と自己インダクタンスL[H]を並列に接続し、実効値V[V],周波数f[Hz]の正弦波電圧を加えた時に、電流I[A]が流れたとする。

電圧VはR，Lとも共通なので

$$I_R = \frac{V}{R}$$



I_RはVと同相。

Lの電流$\dot{I}_L$は$\dot{V}$より位相がπ/2遅れる。ωL=X_Lとすると、

$$I_L = \frac{V}{X_L}$$

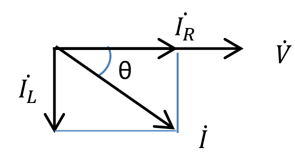
となり、この回路の全電流$\dot{I}$は$\dot{I}_R$と$\dot{I}_L$とのベクトル和となる。

右下のベクトル図では$\dot{V}$を基準ベクトルにしている。

ベクトル図より全電流$\dot{I}$は電圧$\dot{V}$よりθ遅れ、大きさは

$$I = \sqrt{{I_R}^2 + {I_L}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{X_L}\right)^2} = V\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2}$$



$$Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2}} = \frac{RX_L}{\sqrt{R^2 + (X_L)^2}} \quad (4-1)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{I_L}{I_R} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}\right) = \tan^{-1}\frac{R}{X_L} \quad (4-2)$$

上式の(4–1),(4–2)より、

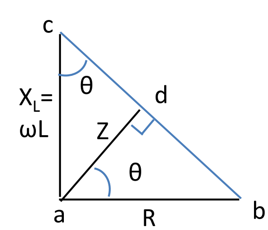
$$\tan\theta = \frac{R}{X_L}, \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L)^2}}, \cos\theta = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + (X_L)^2}}$$

となるので、上記のZは

$$Z = R\cos\theta \quad (4-3)$$

との関係でもある。

以上のインピーダンスの関係を図に表すと右図のようになる。



図にて

$$R = \overline{ab}, \qquad X_L = \overline{ac}, \qquad \sqrt{R^2 + (X_L)^2} = \overline{bc},$$

$\overline{ab} \perp \overline{bc}$ とすれば

$$Z = \overline{ad}, \angle\mathrm{dab} = \angle\mathrm{acb} = \theta$$

となり、上記(4–1),(4–2),(4–3)の3式を満足する。